PART2　分点を表す位置ベクトル

2　△ABC と，三角形の内部の点 P に関して，等式 $4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立つ。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

(2)　△PBC，△PCA，△PAB の面積の比を求めよ。

Point Pickup

点 B，C，P の点 A を始点とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とするとき

$$\vec{p}=k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c}\right)$$

（$\frac{n}{m+n}$ と $\frac{m}{m+n}$ は和が 1）

の形の式を導くことにより，点 P の位置を，線分 BC を内分または外分する点を用いて表すことができる。

第9講　PART2　確認問題

1　△ABCと，三角形の内部の点Pに関して，等式
$3\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+7\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つ。このとき，次の問いに答えよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1)　点Pはどのような位置にあるか。

『辺BCを［ア］：［イ］に内分する点をQとすると，点Pは線分AQを［ウ］：［エ］に内分する点である。』

(2)　△PBC，△PCA，△PABの面積の比を求めよ。

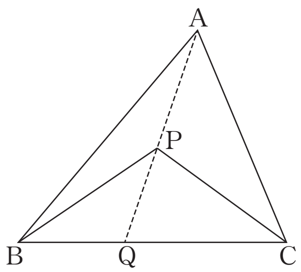
△PBC：△PCA：△PAB＝［オ］：［カ］：［キ］

PART2　分点を表す位置ベクトル

2　△ABC と，三角形の内部の点Pに関して，等式 $4\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つ。

(1)　点Pはどのような位置にあるか。

(2)　△PBC，△PCA，△PAB の面積の比を求めよ。



(1)　$4\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より

$$-4\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{9}=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$

辺BCを $2:3$ に内分する点をQとすると，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AQ}$

したがって，辺BCを $2:3$ に内分する点をQとすると，点Pは線分AQを $5:4$ に内分する点である。

(2)　$\triangle ABC=S$ とすると

$BQ:QC=2:3$，$AP:PQ=5:4$ であるから

$$\triangle PBC=\frac{4}{9}\triangle ABC=\frac{4}{9}S$$

$$\triangle PCA=\frac{5}{9}\triangle ACQ=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}\triangle ABC=\frac{3}{9}S$$

$$\triangle PAB=\frac{5}{9}\triangle ABQ=\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}\triangle ABC=\frac{2}{9}S$$

したがって，$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=\dfrac{4}{9}S:\dfrac{3}{9}S:\dfrac{2}{9}S=4:3:2$

第 9 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イ：5，ウ：4，エ：1，オ：3，
カ：5，キ：7

[解説]

(1)　$3\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+7\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より

$$-3\overrightarrow{AP}+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+7(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$15\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}$$

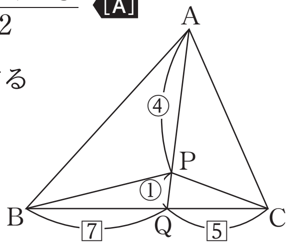
よって

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{15}=\frac{12}{15}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{12}$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{12}$$ [A]

辺 BC を 7：5 に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AQ}$$



したがって，辺 BC を **7：5** に内分する点を Q とすると，点 P は線分 AQ を **4：1** に内分する点である。

> [A]　点 B，C，P の点 A を始点とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とし，k を実数とすると
> $$\vec{p}=k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c}\right)$$
> （$\frac{n}{m+n}$ と $\frac{m}{m+n}$ の）和が 1
> の形の式を導けばよい。

(2)　△ABC $=S$ とする。

AP：PQ＝4：1，BQ：QC＝7：5 であるから

$$\triangle PBC=\frac{1}{5}\triangle ABC=\frac{1}{5}S$$

$$\triangle PCA=\frac{4}{5}\triangle ACQ=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{12}\triangle ABC=\frac{5}{15}S$$

$$\triangle PAB=\frac{4}{5}\triangle ABQ=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{12}\triangle ABC=\frac{7}{15}S$$

したがって

$$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB$$

$$=\frac{1}{5}S:\frac{5}{15}S:\frac{7}{15}S=\mathbf{3:5:7}$$